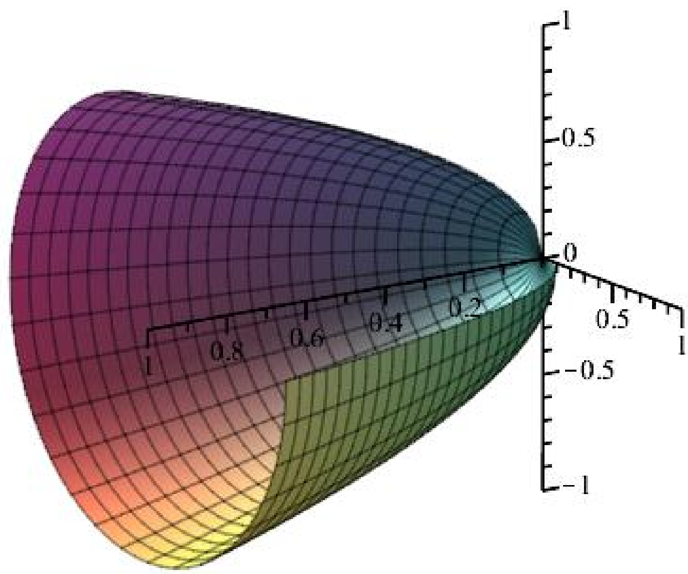
BAHAN AJAR MATEMATIKA KOMPUTASI

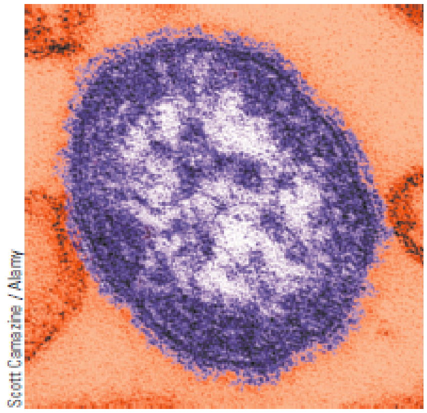
PERTEMUAN 7 : INTEGRAL



Ayunda Putri, M.Sc.
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau.
Kampus Bina Widya UNRI, Simpangbaru, Pekanbaru
Riau, Kodepos 28293

Daftar Isi

Daftar Gambar

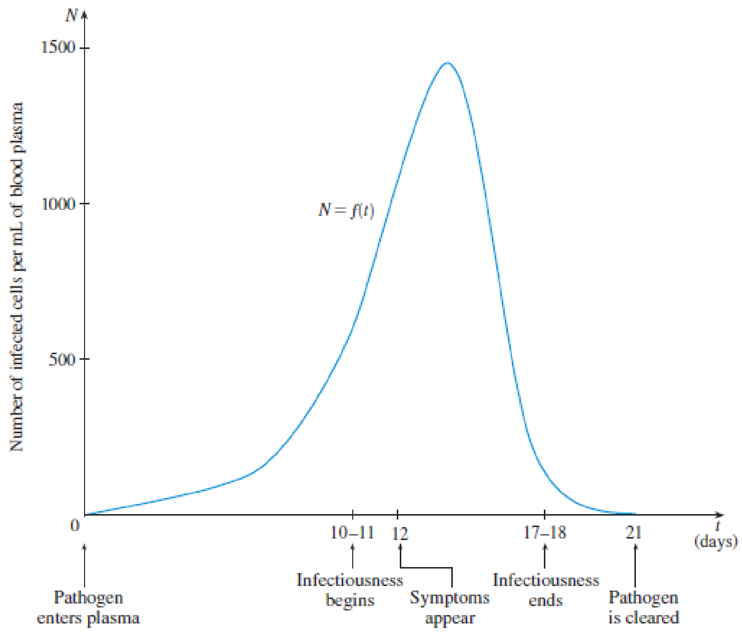


Gambar 1: Virus Campak terlihat melalui mikrograf transmisi elektron

Pathogenesis

Campak adalah penyakit menular yang menginfeksi saluran pernapasan dan disebabkan oleh virus. Meskipun lebih dari 80% populasi dunia telah divaksinasi campak, penyakit ini masih menjadi salah satu dari lima pemyakit mematikan di dunia.

Secara umum, istilah *pathogenesis* merujuk pada asal mula sebuah penyakit muncul dan bagaimana penyakit itu berkembang dari waktu ke waktu. Pada kasus campak, virus campak menginfeksi lewat saluran pernapasan dan berkembang biak disana. Kemudian menyebar ke dalam aliran darah dan kulit. Untuk orang tanpa imunitas terhadap campak, ruam campak muncul sekitar 12 hari setelah infeksi dan pada hari ke 14 kepadatan virus dalam darah pada puncaknya. Selanjutnya, level virus akan menurun dengan cepat beberapa hari kemudian sebagai respon dari imunitas tubuh. Proses ini terlihat pada grafik di bawah ini. Perhatikan bahwa sumbu vertikal diukur dalam jumlah unit sel terinfeksi per mL plasma darah.

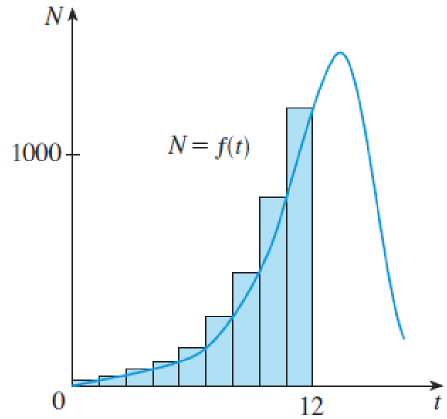


Gambar 2: Kurva Pathogenesis Campak

Notasikan fungsi pathogenesis campak dengan f dalam Gambar 2. $f(t)$ adalah jumlah sel terinfeksi per mL plasma pada hari t. Gejala campak umumnya akan muncul setelah sistem imun terekspos dengan virus pada ambang batas bawah tertentu. Tingkatan infeksi ditentukan oleh jumlah sel terinfeksi per mL dan reaksi imunitas tubuh terhadap sel yang terinfeksi. Jika kepadatan sel terinfeksi dalam darah tetap selama infeksi, maka **jumlah total infeksi** dihitung dengan

$$\text{jumlah infeksi} = \text{kepadatan sel terinfeksi} \times \text{waktu}$$

Kepadatan sel terinfeksi pada kenyataannya tidak akan konstan, namun kita dapat memotong durasi infeksi menjadi interval waktu yang lebih sempit dimana perubahan densitas atau kepadatan sel terinfeksi cenderung sedikit.
Perhatikan gambar berikut :



Gambar 3: Kurva pathogenesis campak masa awal inkubasi hingga $t = 12$

Jika masing-masing dari interval waktu yang telah dipecah tadi memiliki lebar (rentang) Δt, maka kita dapat menambahkan jumlah luas $f(t_i)\Delta t$ dari segi empat pada Gambar 3 untuk mendapatkan nilai pendekatan jumlah infeksi selama 12 hari. Kemudian tentukan limitnya ketika $\Delta t \longrightarrow 0$ dan jumlah segi empat bertambah. Sehingga

$$d = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{t=1}^{n} f(t_{i-1}\Delta t) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(t_i)\Delta t \qquad (1)$$

Dapat disimpulkan bahwa jumlah infeksi yang diperlukan untuk menstimulasi munculnya gejala adalah sebagai berikut :

Luas daerah di bawah kurva pathogenesi $N = f(t)$ dari $t = 0$ sampai $t = 12$ (di arsir pada Gambar 3) sama dengan jumlah total infeksi yang diperlukan untuk berkembang menjadi gejala

1 Luas dan Jarak

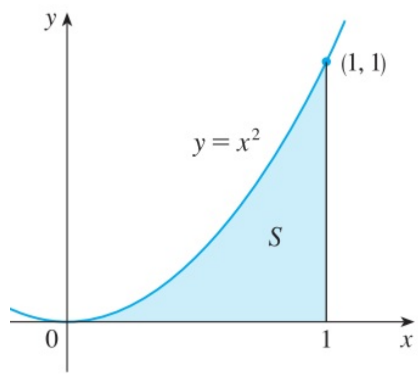
■ Persoalan Luas Daerah

Misalkan akan diselesaikan **persoalan luas daerah**: Hitung luas daerah S yang terletak dibawah kurva $y = f(x)$ dari a ke b. Ini berarti bahwa daerah S, Gambar 4 di bawah ini, adalah daerah yang dibatasi oleh fungsi kontinu f (dengan

$f(x) \geq 0$), garis tegak $x = a$ dan $x = b$, dan sumbu-x.

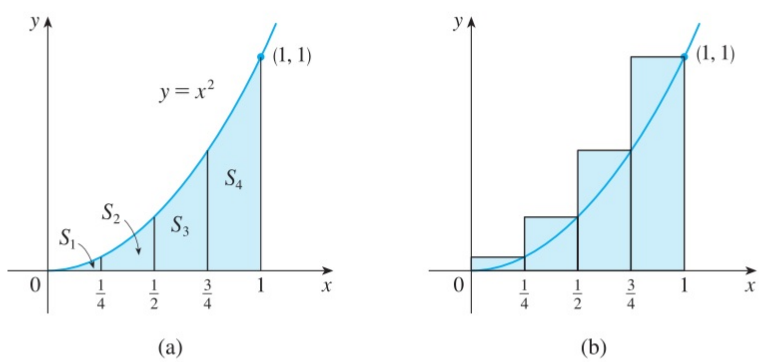
Bagaimanapun menentukan luas daerah yang dibatasi kurva tidaklah mudah. Namun ide membagi daerah menjadi daerah yang standard seperti segi empat, dapat digunakan.

Contoh 1.1. Gunakan segi empat untuk menaksir luas daerah dibawah parabola $y = x^2$ dari 0 ke 1, seperti terlihat pada Gambar 4.



Gambar 4: Grafik $y = x^2$

Solusi. Andaikan daerah S dibagi menjadi daerah S_1, S_2, S_3 dan S_4 dengan membuat garis vertikal di $x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}$ dan $x = \frac{3}{4}$ seperti pada Gambar 5(a).



Gambar 5: Grafik taksiran atas luas daerah di bawah kurva $y = x^2$

Kemudian setiap daerah ditaksir dengan segi empat yang alas tingginya sama dengan alas dan tinggi daerah bagian tersebut, seperti pada Gambar 5(b). Dengan kata lain, tinggi segi empat tersebut adalah nilai dari fungsi $f(x) = x^2$ pada ujung kanan setiap subinterval $[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, dan $[\frac{3}{4}, 1]$.

Perhitungan dengan Maple dilakukan seperti berikut ini:

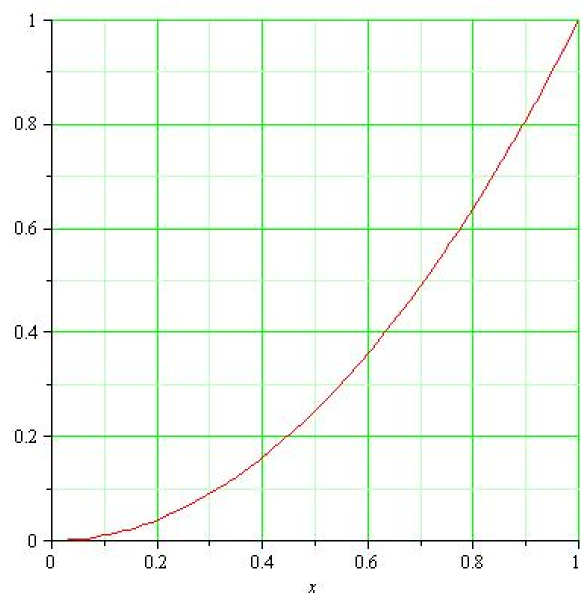
1. Pertama definisikan fungsi,

```
restart;
with(plots):
f:=x->x^2;
```

$$f := x- > x^2$$

kemudian plot fungsi f.

```
plot(f(x),x=0..1,axis=[gridlines=[colour=green,
   majorlines=1]]);
```



Gambar 6: Grafik $f(x) = x^2$

2. Hitung luas masing-masing segi empat $S_i, i = 1, 2, 3, 4$, dengan $\Delta t = \frac{1}{4}$ adalah lebar masing-masing segi empat dan mengambil titik ujung sebelah kanan subinterval (taksiran atas).

```
Delta_t:= 1.*(1/4);
```

$$Delta_t := .2500000000$$

menghitung luas masing-masing segi empat, $S_i, i = 1..4$ dilakukan dengan

```
for i from 1/4 by 1/4 to 1 do
     S[i] := Delta_t*f(i)
end do;
```

$$S_{1/4} := 0.01562500000$$
$$S_{1/2} := 0.06250000000$$
$$S_{3/4} := 0.1406250000$$
$$S_1 := 0.2500000000$$

3. Menghitung total luas daerah keempat segi empat tersebut (dinotasikan dengan R_4). Pertama, inisiasi nilai total dengan 0

```
summ := 0;
```

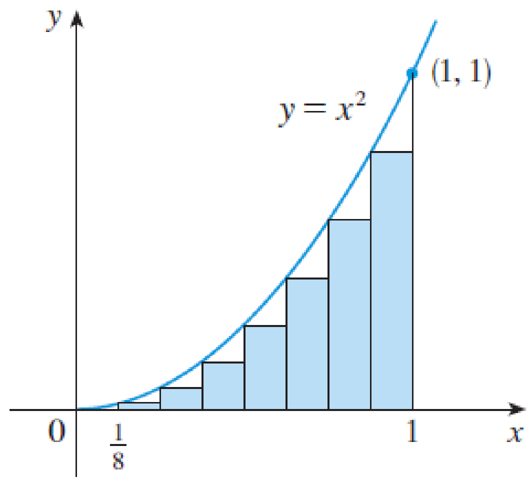
$$summ := 0$$

kemudian hitung total luas ke empat segi empat

```
for i from 1/4 by 1/4 to 1 do
S[i] :=Delta_t*f(i);
     summ := summ+S[i]
end do:
printf("R4= %8.5f", summ)
```

$$R4 = 0.46875$$

Selain menggunakan persegi empat seperti pada Gambar 5(b), juga dapat digunakan persegi empat yang lebih kecil seperti pada Gambar 7, dimana tingginya adalah nilai f pada ujung kiri dari setiap subinterval (taksiran bawah).



Gambar 7: menggunakan titik ujung kiri

Dengan cara yang sama

1. Menghitung luas segi empat Definisikan lebar segi empat dengan $\Delta t = \frac{1}{4}$

```
Delta_t:= 1.*(1/4);
```

$$Delta_t := .2500000000$$

menghitung luas masing-masing segi empat, $S_i, i = 1, 2, 3, 4$.

```
for i from 0 by 1/4 to 3/4 do
    S[i] := Delta_t*f(i) ;
end do;
```

$$S_0 := 0.$$

$$S_{1/4} := 0.15625000000$$

$$S_{1/2} := 0.62500000000$$

$$S_{3/4} := .1406250000$$

2. Menghitung total luas segi empat, L_4. Inisiasi total luas dengan

```
summ:=0;
```

$$summ := 0$$

Hitung total luas ke empat segi empat L_4,

```
for i from 0 by 1/4 to 3/4 do
    S[i] := Delta_t*f(i);
    summ := summ+S[i]
end do:
printf("L4= %8.5f", summ);
```

$$L4 = 0.21875$$

Lebih lanjut, bagaimana jika segiempatnya diperbanyak? Perhatikan tabel berikut ini.

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

Tabel 1: Tabel luas segiempat untuk n yang berbeda

Dari tabel terlihat bahwa solah-olah R_n mendekati $\frac{1}{3}$ untuk n yang semakin besar. Perhatikan contoh code di bawah ini untuk $n = 10$. Lakukan untuk $n = 20, 30, 50, 100, 100!$.

Berikut untuk menentukan 10 luas segiempat dengan mengambil titik kiri ujung interval (taksiran bawah), dinotasikan dengan L_{10}.

```
restart:
f:=x->x^2:
n:=10:
Delta_t:=1/n:
x_n:=1-Delta_t:
summ:=0:
for i from 0 by Delta_t to x_n do
    S[i] := Delta_t*f(i):
    summ := summ+S[i]:
end do:
printf("L%3d= %8.5f", n, summ);
```

$$L_{10} = 0.28500$$

Berikut untuk menentukan 10 luas segi empat dengan mengambil titik kanan ujung interval (taksiran atas), dinotasikan dengan R_{10}.

```
restart:
f:=x->x^2:
n:=10:
delta_t:=1/n:
x_n:=1:
for i from 1/n by Delta_t to x_n do
        S[i] := Delta_t*f(i):
        summ := summ+S[i]:
end do:
printf("R%3d= %8.5f", n, summ);
```

$$R_{10} = 0.38500$$

Dari komputasi di atas dapat disimpulkan bahwa jumlah luas daerah segiempat dengan takiran atas mendekati $\frac{1}{3}$, yaitu

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} R_n = \frac{1}{3}$$

jumlah taksiran bawah juga mendekati $\frac{1}{3}$, yaitu

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} L_n = \frac{1}{3}$$

Selain menggunakan titik ujung kiri atau akan, tinggi segi empat ke-i juga bisa diambil sebarang $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Bilangan $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ disebut *titik sampel.* Secara umum, luas daerah di bawah kurva jika mengambil titik sampel sebagai tinggi segi empat diberikan oleh

$$A = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left[f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x \right] \tag{2}$$

1.1 Latihan

1. Lakukan komputasi untuk mencari taksiran luas persegi empat pada Contoh 1.1 dengan menggunakan persamaan yang didefinisikan oleh persamaan (2).
2. (a) luas daerah di bawah grafik dari $f(x) = 1 + x^2$ dari $x = -1$ sampai $x = 2$ menggunakan tiga persegi panjang dan titik-titik ujung kanan. Kemudian tingkatkan estimasinyamenggunakan enam persegi panjang. Plotlah grafiknya.

   (b) Ulangi bagian (a) menggunakan titik-titik ujung kiri.

   (c) Ulangi bagian (a) menggunakan titik-titik tengah.

   (d) Dari bagian (a)-(c), manakah yang memberikan estimasi terbaik?
3. Tentukan daerah yang luasnya sama dengan limit yang diberikan di bawah ini

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{4n} \tan \frac{i\pi}{4n}$$

4. (a) Estimasilah luas daerah di bawah kurva $f(x) = \sin x$ dari $x = 0$ sampai $x = \pi/2$ menggunakan empat buah segiempat aproksimasi dan gunakan titik ujung kanan sebagai penentu tinggi segiempatnya. Plotlah grafiknya.

   (b) Ulangilah soal di atas menggunakan titik ujung kiri.

2 Integral Tentu

Berikut ini beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan integral tentu:

Definisi 2.1. *Jika f adalah fungsi didefinisikan pada $a \leq x \leq b$. Interval $[a, b]$ dibagi menjadi n subinterval yang sama besar $\Delta x = (b - a)/n$. Misalkan $x_0(= a), x_1, x_2, \ldots, x_n(= b)$ titik ujung dari subinterval tersebut dan misalkan $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ menjadi titik sampel dalam subinterval tersebut, jadi x_i^* terletak dalam subinterval ke-i, $[x_{i-1}, x_i]$. Maka* **integral tentu (definite integral)** f **dari** a **ke** b *adalah*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x$$

menghasilkan nilai yang sama untuk semua kemungkinan pemilihan titik sampel. Jika limit ada maka f disebut **integrable** *(dapat diintegralkan) pada $[a, b]$.*

NOTE Sejauh ini integral tentu didefinisikan untuk fungsi yang terintegral (integrable function), tapi tidak semua fungsi terintegralkan. Teorema berikut membuktikan untuk kasus yang lebih tinggi

Teorema 2.2. *Jika f kontinu pada $[a, b]$, atau jika f tidak kontinu hanya dibeberapa titik, maka f terintegralkan di $[a, b]$; yaitu integral tentu $\int_a^b f(x)dx$ ada.*

Jika f terintegralkan pada $[a, b]$, maka limit dalam Definisi 2.1 ada, akan memberikan hasil yang sama tidak tergantung bagaimana memilih titik sampel x_i^*. Untuk memudahkan perhitungan integral, diambil titik ujung kanan interval sebagai titik sampel. Maka $x_i^* = x_i$ dan didefinisikan integral sebagai berikut.

Teorema 2.3. *Jika f terintegral di $[a,b]$, maka*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x,$$

dengan $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ *dan* $x_i = a + i\Delta x$.

NOTE Penjumlahan

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

yang dinyatakan dalam Teorema 2.3 disebut **Riemann sum**, seorang matemaikawan Jerman, Bernhard Riemann (1826-1866).

Contoh 2.4. (a) Hitunglah Riemann sum $f(x) = x^3 - 6x$, sebagai titik sampel ambil titik ujung kanan dan $a = 0, b = 3$, dan $n = 6$.

(b) Evaluasi $\int_0^3 (x^3 - 6x)dx$

Solusi. .

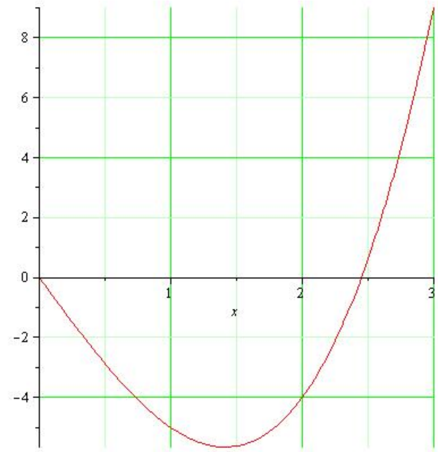
(a) Dengan $n = 6$, panjang interval adalah

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

dan titik ujung kanan adalah $x_1 = 0.5, x_2 = 1.0, x_3 = 1.5, x_4 = 2.0, x_5 = 2.5$ dan $x_6 = 3.0$. Komputasinya dengan Maple adalah

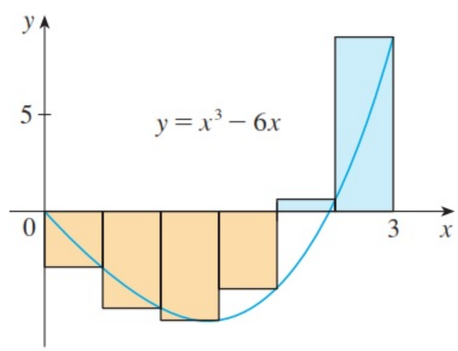
```
restart:
f:=x->x^3-6*x;
with(plots):
plot(f(x),x=0..3,axis=[gridlines=[colour=green,
   majorlines=2]]);
```

$$f := x- > x^3 - 6x$$



Gambar 8: Grafik $y = x^3 - 6x$

Grafik fungsi $f(x)$ dengan enam segi empat di berikan oleh gambar berikut:



Gambar 9: Grafik $f(x)$ dan enam buah segiempat

Untuk menghitung jumlah Riemann-nya, pertama inisiasikan nilai-nilai awal yang diperlukan. a, b dan n berturut-turut adalah titik awal interval, titik ujung interval, dan jumlah segi empat. $Delta_x$ adalah lebar subinterval.

```
a:=0;
b:=3;
n:=6.;
Delta_x:=(b-a)/n;
```

$$a := 0$$

$$b := 3$$

$$n := 6.$$

$$Delta_x := .5000000000$$

kemudian hitung jumlah Riemannnya:

```
summ:=0:
for i from Delta_x by Delta_x to b do
    S_i:=f(i)*Delta_x;
    summ:=summ+S_i;
end do:
printf("R6= %6.4f",summ);
```

$$R6 = -3.9375$$

Fungsi f tidak positif sehingga Riemann sum tidak menggambarkan jumlah dari luas daerah segi empat. Tapi menggambarkan jumlah dari luas daerah segi empat biru (di atas sumbu-x) minus jumlah daerah segiempat kuning (di bawah sumbu-x), lihat Gambar 9.

(b) Menghitung integral tentu $\int_0^3 (x^3 - 6x)dx$,

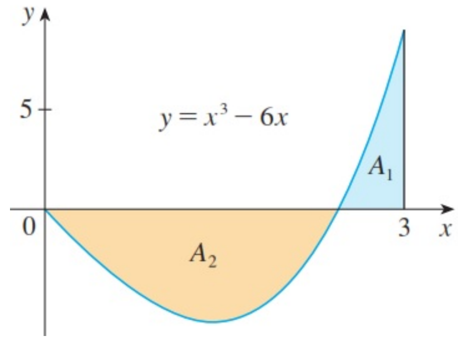
```
int(x^3-6*x,x=0..3);
```

$$-27/4$$

```
convert(%,float,4);
```

$$-6.750$$

Integral ini tidak bisa diartikan sebagai luas daerah karena f mempunyai nilai positif dan negatif. Tapi bisa diartikan sebagai selisih dari luas daerah $A_1 - A_2$, dimana A_1 dan A_2 ditunjukkan pada Gambar 9.



Gambar 10: Grafik daerah A_1 dan A_2

2.1 Latihan

Evaluasilah integral berikut dengan menggunakan konsep sebagai luas daerah

1. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$
2. $\int_0^3 (x-1)dx$
3. $\int_{-5}^5 (x-\sqrt{25-x^2})dx$
4. $\int_0^1 |2x-1|dx$
5. $\int_0^9 \frac{1}{3}x - 2dx$
6. **Aturan Titik Tengah (Midpoint Rule)**

   $$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n}(f(\bar{x}_i)\Delta x = \triangle\ x[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)],$$

   dimana $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ dan $\bar{x}_i = \dfrac{1}{2}(x_{i-1}+x_i) =$ titik tengah dari $[x_{i-1}, x_i]$.

   Gunakan Aturan Titik Tengah dengan $n = 5$ untuk menaksir

   $$\int_1^2 \frac{1}{x}dx$$

7. Gunakan Aturan Titik Tengah untuk mengaproksimasi integral $\int_0^8 \sin\sqrt{x}dx$ dengan $n = 4$. Bulatkan jawaban anda sampai empat tempat desimal.

2.2 Kasus : Pathogenesis Campak

Ingat kembali fungsi berikut

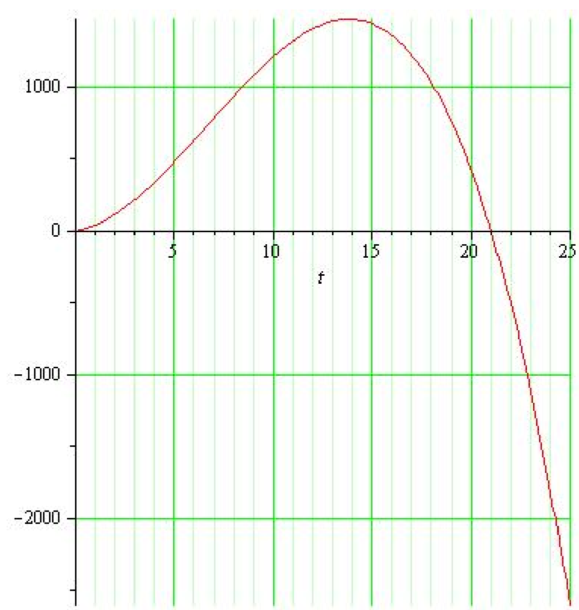
$$f(t) = -t(t-21)(t+1)$$

yang telah digunakan untuk memodelkan konsentrasi virus campak dalam tubuh individu terinfeksi. Luas daerah di bawah f merepresentasikan jumlah infeksi. Dari Gambar 2 telah diketahui bahwa pada $t = 12$ jumlah infeksi mencapai puncak ambang bawah dimana gejala muncul. Hitunglah ambang batas ini.

Memplot grafik

```
restart;
with(plots):
f:=t->-t*(t-21)*(t+1);
plot(f(t),t=0..25,axis=[gridlines=[color=green,majorlines
   =1]]);
```

$$f := t- > -t(t-21)(t+1)$$



Gambar 11: grafik $f(t)$

Kemudian, hitung integral dari $f(t)$ untuk $t = 0$ hingga $t = 12$,

```
restart;
with(plots):
Int(-t(t-21)(t+1),t=0..12)=int(f(t),t=0..12);
```

$$\int_0^{12} -t(t-21)(t+1)dt = 7848$$

maka, dihari ke-12, konsentrasi virus di tubuh individu terinfeksi akan memunculkan gejala campak jika mencapai batas 7848 sel terinfeksi per mL.

3 Aturan Substitusi

Aturan Subsitusi. Jika $u = g(x)$ adalah fungsi yang terdeferensial yang range-nya adalah interval I dan f kontinu di I, maka

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Contoh 3.1. Evaluasilah integral berikut

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx$$

Solusi. Menggunakan *package IntegrationTools*, kita dapat menerapkan metode substitusi pada soal ini. Perhatikan komputasinya sebagai berikut.

```
restart;
with(IntegrationTools):
f:=Int(2*x*(1+x^2)^(1/2),x);
```

$$f := \int 2x\sqrt{1+x^2}dx$$

Gunakan fungsi **Change** untuk memisalkan $u = 1 + x^2$

```
g:=Change(f,u=1+x^2);
```

$$g := \int \sqrt{u}du$$

Kemudian evaluasilah integral tersebut dengan fungsi **value**

```
gn:=value(g);
```

$$gn := \frac{2}{3}u^{3/2}$$

Selanjutnya, kembalikan nilai $u = 1 + x^2$ ke persamaan gn dengan fungsi **subs** untuk mendapatkan solusi dari integral tak tentu tersebut

```
F:=subs(u=1+x^2,gn);
```

$$F := \frac{2}{3}(1 + x^2)^{3/2}$$

Perhatikan contoh lain berikut ini.

Contoh 3.2. Temukan $\int x^3 \cos(x^4 + 3)dx$.

Solusi.

```
restart;
with(IntegrationTools):
f:=Int(x^3*(cos(x^4+3)),x);
```

$$f := \int x^3 \cos(x^4 + 3)dx$$

Gunakan fungsi **Change** untuk memisalkan $u = 1 + x^2$

```
g:=Change(f,u=x^4+3);
```

$$g := \int \frac{1}{4}\cos(u)du$$

Kemudian evaluasilah integral tersebut dengan fungsi **value**

```
gn:=value(g);
```

$$gn := \frac{1}{4}\sin(u)$$

Selanjutnya, kembalikan nilai $u = 1 + x^2$ ke persamaan gn dengan fungsi **subs** untuk mendapatkan solusi dari integral tak tentu tersebut

```
F:=subs(u=x^4+3,gn);
```

$$F := \frac{1}{4}\sin(x^4 + 3)$$

Perhatikan contoh berikut, mengevaluasi integral tentu dengan metode substitusi.

Contoh 3.3. Evaluasilah

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$$

Solusi. Misal $u = 3 - 5x$. Jika $x = 1$ maka $u = -2$ dan ketika $x = 2$ maka $u = -7$. Aplikasikan ini ke dalam komputasi sebagai berikut:

```
restart;
with(IntegrationTools):
f:=Int(1/(3-5*x)^2,x);
```

$$f := \int \frac{1}{(3-5x)^2})dx$$

```
g:=Change(f,u=3-5*x);
```

$$g := \int -\frac{1}{5u^2}du$$

Gunakan fungsi **unapply** untuk menyatakan hasil integrasi fungsi g di atas sebagai fungsi bervariabel u.

```
F:=unapply(value(g),u);
```

$$F := u \longrightarrow \frac{1}{5u}$$

Substitusikan nilai u

```
u:=x->3-5*x:
u_1:=u(1);
u_2:=u(2);
```

$$u_1 := -2$$

$$u_2 := -7$$

Kemudian hitung $F(u_2)$ dikurangi $F(u_1)$

```
Fnew:=F(u_2)-F(u_1);
```

$$Fnew := \frac{1}{14}$$

3.1 Latihan

1. Evaluasilah integral berikut

   (a) $\int x \sin(x^2) dx$

   (b) $\int x^2(x^3 + 5)^9 dx$

   (c) $\int (3x - 2)^{20} dx$

   (d) $\int \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

   (e) $e^x \sqrt{1 + e^x} dx$

2. Evaluasilah integral berikut

   (a) $\int_0^1 \cos(\pi t/2) dt$

   (b) $\int_0^1 \sqrt[3]{1 + 7x} dx$

   (c) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4 \tan x) dx$

   (d) $\int_1^2 x\sqrt{x - 1} dx$

   (e) $\int_0^1 \dfrac{dx}{(1 + \sqrt{x})^4}$

3. Bernapas adalah proses siklik dan sebuah siklus respiratory dari awal menghirup udara hingga menghembuskannya membutuhkan sekitar 5 detik. Laju maksimum sirkulasi udara ke paru-paru adalah sekitar $0.5L/s$. Fungsi yang biasa digunakan untuk memodelkan aliran udara ke paru-paru adalah

   $$f(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi t/5)$$

   Gunakan model ini untuk menemukan volume udara yang dihirup ke paru-paru pada waktu t.

4 Integral Parsial

Aturan perkalian pada turunan menyatakan bahwa jika f dan g terdiferensialkan, maka

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Untuk notasi integral taktentu persamaan di atas menjadi

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]dx = f(x)g(x)$$

Menyusun ulang persamaan ini menjadi

formula untuk integral parsial

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \tag{3}$$

Contoh 4.1. Evaluasilah $\int \ln x dx$.

Solusi. Menggunakan package *IntegrationTools* dan fungsi *Parts*, komputasinya dengan Maple sebagai berikut

```
restart;
with(IntegrationTools):
y:=Int(ln(x),x);
```

$$G := \int \ln(x)dx$$

```
y1:=Parts(y,ln(x));
```

$$y1 := x\ln(x) - \int 1dx$$

```
eval(%);
```

$$yn := x\ln(x) - x$$

Contoh 4.2. Hitunglah integral $\int \exp(x)\cos(x)dx$

Solusi. Menggunakan package *IntegrationTools* dan fungsi *Parts*, komputasinya dengan Maple sebagai berikut

```
restart;
with(IntegrationTools):
G:=Int(exp(x)*cos(x),x);
```

$$G := \int e^x \cos(x)dx$$

Untuk soal ini, berdasarkan formula (3) yang dimisalkan sebagai $f(x)$ adalah $\exp(x)$. Sehingga pada fungsi *Parts*, inputkan $\exp(x)$.

```
Gn:=Parts(G,exp(x));
```

$$Gn := \sin(x)e^x - (\sin(x)e^x dx)$$

Perhatikan bahwa masih perlu dilakukan pemisalan kembali karena ada bagian $\sin(x)e^x$. Maka

```
Gn2:=Parts(Gn,exp(x));
```

$$Gn2 := \sin(x)e^x + e^x\cos(x) + \int(-e^x\cos(x))dx$$

Selanjutnya, menambahkan kedua ruas dengan $\int(e^x\cos(x))dx$

```
(G=Gn2)+G;
```

$$2(\int(e^x\cos(x))dx) = \sin(x)e^x + e^x\cos(x) + \int(-e^x\cos(x))dx + \int(e^x\cos(x))dx$$

```
simplify(%);
```

$$2(\int(e^x\cos(x))dx) = e^x(\sin(x)+\cos(x))$$

Membagi dua kedua ruas akan diperoleh solusi dari integral taktentu tersebut,

$$\int(e^x\cos(x))dx = \frac{1}{2}e^x(\sin(x)+\cos(x))$$

4.1 Latihan

1. Evaluasilah integral berikut dengan metode integral parsial
   (a) $\int x \cos 5x dx$
   (b) $\int re^{5/2} dr$
   (c) $\int x^2 \sin \pi x dx$
   (d) $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$
   (e) $\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2} dr}$
2. Gunakan metode integral parsial untuk menyelesaikan soal pada latihan (3.1) no 1.
3. Gunakan integral parsial untuk menunjukkan
   (a) $\int (\ln)^n dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$
   (b) $x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$

5 Aplikasi Integral

5.1 Luas Daerah di Bawah Kurva

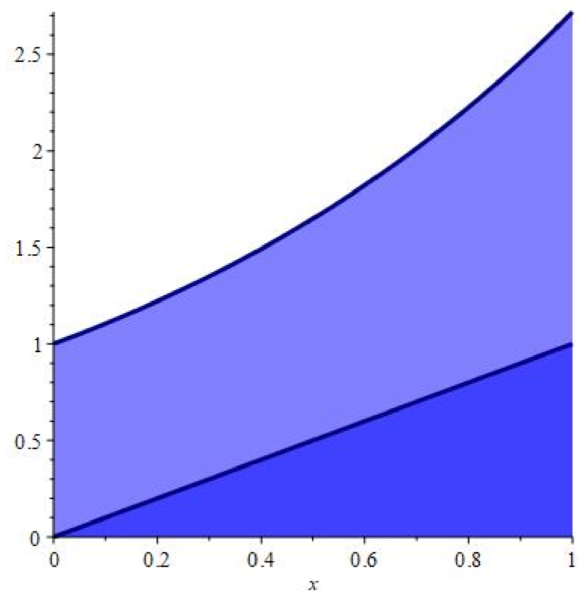
Luas daerah A yang dibatasi oleh kurva $y = f(x), y = g(x)$ dan garis $x = a, x = b$, dengan f dan g kontinu dan $f(x) \geq g(x)$ untuk semua x dalam $[a, b]$ adalah

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \tag{4}$$

Contoh 5.1. Temukan luas daerah yang berada di bawah $y = e^x$, di atas $y = x$ dan batasi oleh sisi-sisi $x = 0$ dan $x = 1$.

Solusi. Plot daerah menggunakan package *plots*

```
restart;
with(plots):
y1:=e^x:
y2:=x:
plot([exp(x),x],x=0..1, color = "NavyBlue", thickness =
   3, filled = [color = "Blue", transparency = 0.5]);
```



Gambar 12: Grafik daerah diantara kurva $y = e^x$ dan $y = x$

Kurva batas atas adalah $y = e^x$, batas bawah $y = x$. Gunakan (4) dengan $f(x) = e^x, g(x) = x, a = 0$ dan $b = 1$.

```
A:=unapply(int(exp(x)-x,x),x);
```

$$A := x \longrightarrow e^x - \frac{1}{2}x^2$$

Mengurangkan nilai fungsi untuk $x = 1$ dan $x = 0$,

```
A(1)-A(0);
```

$$e - \frac{3}{2}$$

5.2 Kasus : Perkembangan penyakit dan Imunitas

Ingat kembali fungsi yang memodelkan perkembangan campak pada pasien tanpa imunitas,

$$f(t) = -t(t-21)(t+1)$$

Terlihat bahwa total infeksi pada waktu t (diukur dari luas daerah kurva pathogenesis sampai waktu t) memegang peranan penting dalam menentukan apakah individu terinfeksi akan menunjukkan gejala. Khususnya, gejala akan muncul hanya jika jumlah sel terinfeksi melewati 7848 $sel/mL \times hari$, yaitu muncul pada hari ke- 12 infeksi untuk individu tanpa imunitas, yaitu

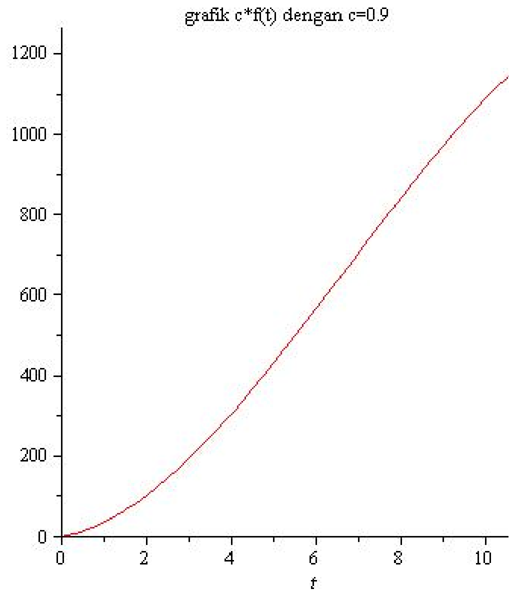
$$\int_0^{12} f(t)dt = 7848(sel/mL) \times hari$$

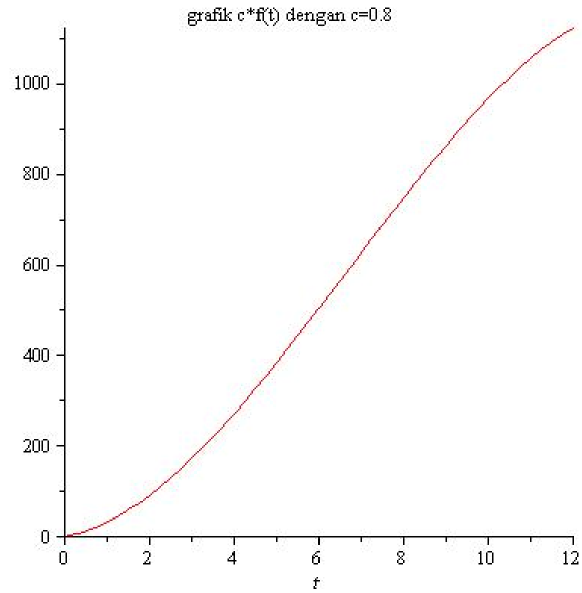
1. Plotlah kurva $cf(t)$ untuk $c = 0.9, 0.8, 0.6$ dan 0.4. Kurva tersebut akan menyerupai kurva untuk pasien yang level imunitasnya naik terhadap virus pada waktu infeksi.

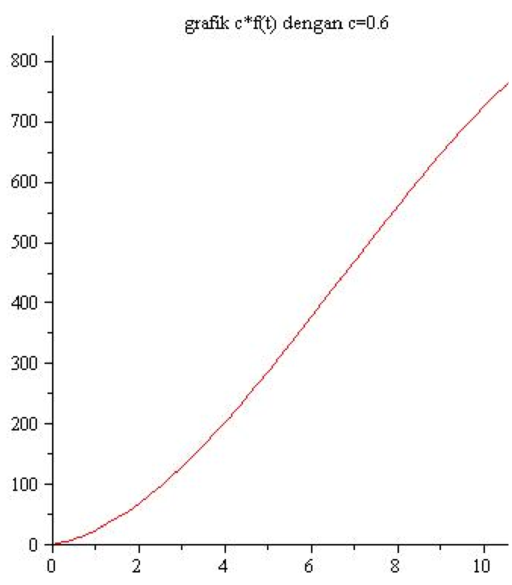
```
restart;
with(plots):
f:=-t*(t-21)*(t+1);
```

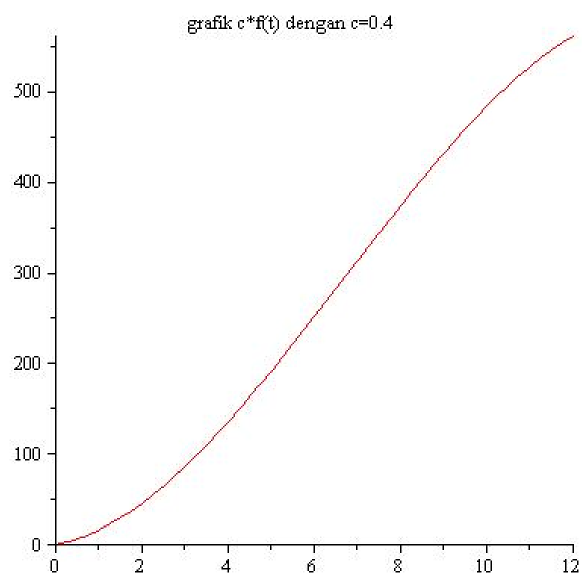
$$f := -t(t-21)(t+1)$$

mengganti nilai c, diperoleh grafik jumlah sel terinfeksi untuk masing-masing $c = 0.9, 0.8, 0.6$ dan 0.4.



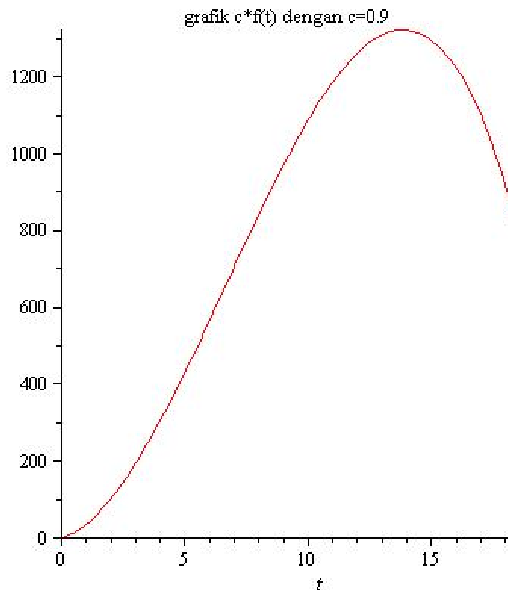


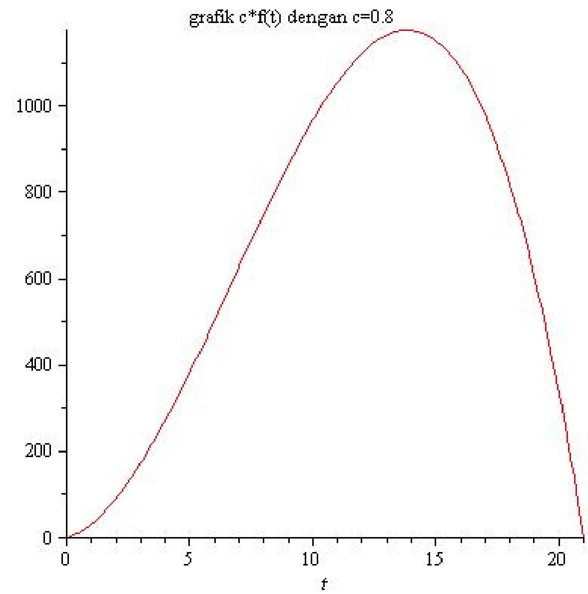


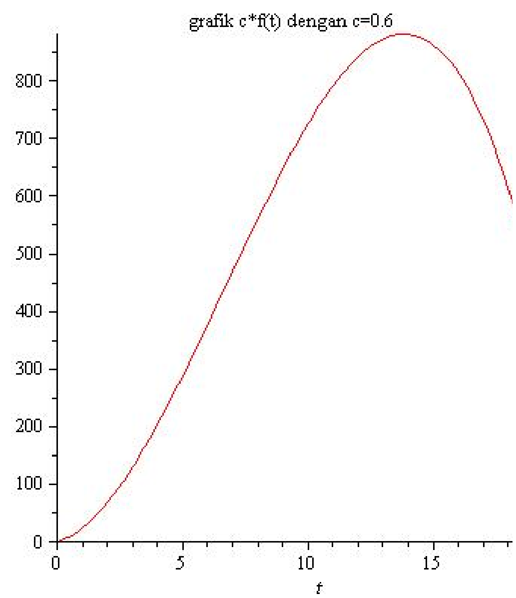


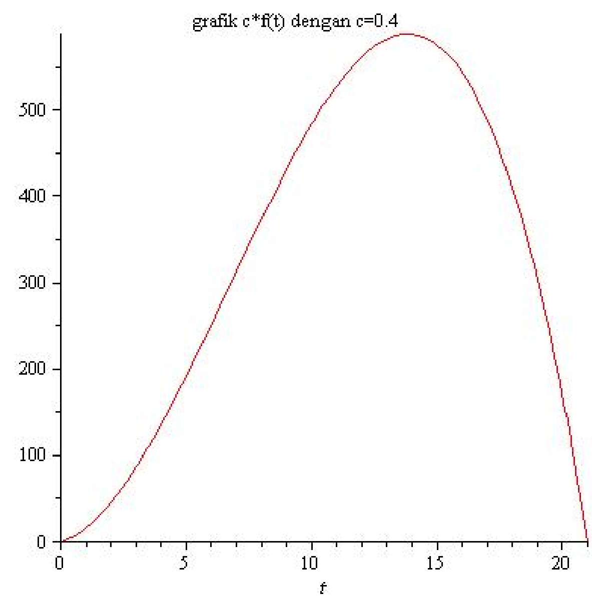
2. Beberapa pasien pada soal nomor 1 akan menunjukkan gejala dan beberapa tidak. Temukan luas daerah di bawah kurva dari $t = 0$ hingga $t = 21$ untuk masing-masing nilai c dan bandingkan dengan nilai 7848 yang diperlukan untuk menunjukkan gejala. Pasien manakah yang akan menunjukkan gejala pada suatu waktu selama masa infeksinya?

Pertama plot grafik fungsi $c * f(t)$ untuk $t = 0..21$ dan masing-masing c,









Hitung integral $c * f(t)$ untuk masing-masing c sebagai berikut:

```
int(0.9*f(t),t=0..21);
```

$$15975.22500$$

```
int(0.8*f(t),t=0..21);
```

$$14200.20000$$

```
int(0.6*f(t),t=0..21);
```

$$10650.15000$$

```
int(0.4*f(t),t=0..21);
```

$$7100.100000$$

Untuk $c = 0.9, 0.8, 0.6$, jumlah sel terinfeksi lebih besar dari 7848 sehingga pasien dengan konstanta kelajuan infeksi ini menunjukkan gejala selama masa infeksi 21 hari. Sedangkan untuk pasien dengan $c = 0.4$, jumlah total sel terinfeksi setelah 21 hari lebih kecil dari batas bawah jumlah sel terinfeksi untuk menunjukkan gejala.

Istilah *menular* merujuk pada penyakit yang dapat berpindah antar individu. Untuk pasien dengan imunitas, kemenularannya dimulai sekitar hari $t_1 = 10$ dan berakhir pada $t_2 = 18$. Penularan dimulai pada hari ke-10 karena konsentrasi virus dalam plasma setelah 10 hari (yaitu nilai $f(10)$) adalah batas bawah konsentrasi yang diperlukan sebelum penularan dapat muncul. Lebih lanjut, pemularan berakhir pada hari ke-18 karena sistem imun mampu mengatasi transmisi lebih lanjut.

3. Plot titik $P_1 = (t_1, f(t_1))$ dan $P_2 = (t_2, f(t_2))$ pada grafik f. Titik-titik ini menunjjkkan nilai-nilai f diawal dan diakhir periode penularan. Gambarlah garis diantara titik ini. Berapakah kemiringan garis tersebut?

Hitung gradien (m) garis lurus dengan rumus $m = \dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$

```
m:=(y2-y1)/(x2-x1);
```

$$m := -23$$

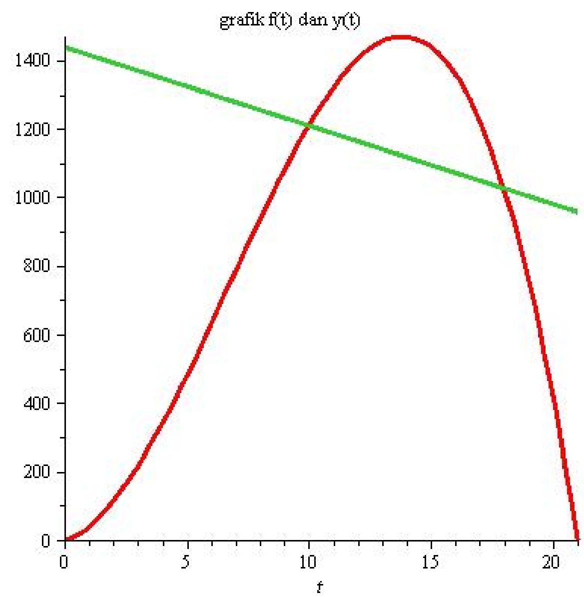
Kemudian tentukan persamaan garisnya dengan formula $y = m(t - t_1) + y_1$,

```
y:=m*(t-x1)+y1;
```

$$y := -23t + 1440$$

Kemudian plot,

```
plot([f(t),y(t)],t=0..21,title="grafik f(t) dan y(t)"
  );
```



Gambar 13: Grafik $f(t)$ dan $y(t)$

4. Diketahui $L = f(t_1)$ adalah batas bawah konsentrasi dari virus untuk memulai transmisi, plot titik P_3 pada kurva $N = 0.9f(t)$ dengan $0.9f(t) = L$. Nilai yang t memenuhi persamaan ini adalah waktu dimana penularan dimulai untuk pasien dengan $c = 0.9$. Telah ditunjukkan bahwa waktu dimana penularan berakhir untuk pasien tersebut dapat ditentukan dengan menggambar sebuah garis yang melewati P_3 dengan kemiringan yang sama seperti Soal nomor 3 dan tentukan t_4 dimana garis tersebut berpotongan dengan kurva $N = 0.9f(t)$. Gambarlah garis tersebut dan tentukan t_4.

   Untuk menemukan t_4, pertama temukan persamaan garis yang sejajar dengan $y = -23t + 1440$ dan titik $(t_3, P(t_3))$. t_3 dihitung dengan menyelesaikan $0.9f(t) = f(t_1)$, yaitu

```
L:=0.9*f(t);
```

$$L := -0.9t(t-21)(t+1)$$

```
f(t1);
```

$$1210$$

```
N:=-.9*t*(t-21)*(t+1)-1210;
```

$$N := -0.9t(t-21)(t+1) - 1210$$

Menggunakan fungsi **solve**

```
s:=[solve(N,t)];
```

$$s := [11.25847153, 16.14020897, -7.398680502]$$

Selanjutnya ambil elemen pertama dari s, sebagai t_3, yaitu

```
t3:=s[1];
```

$$t3 := 11.25847153$$

Hitung nilai $f(t_3)$,

```
y3:=f(t3);
```

$$y3 := 1344.444444$$

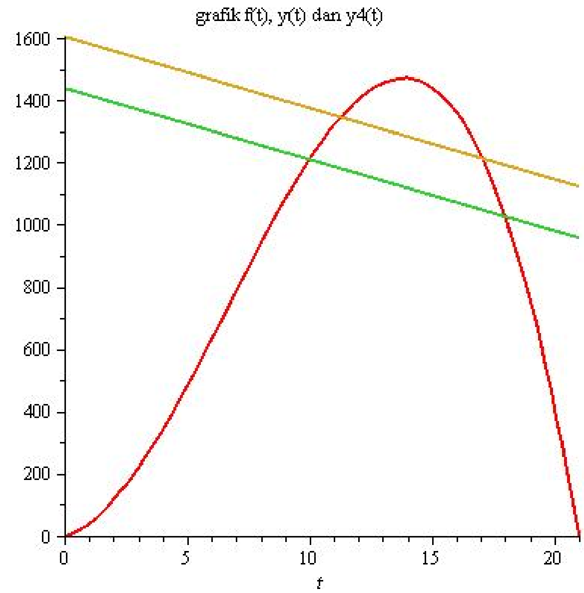
dan tentukan persamaan garis lurusnya,

```
y4:=m*(t-t3)+y3;
```

$$y4 := -23 * t + 1603.389289$$

Plot grafik y_4 dalam bidang Cartesian yang sama dengan grafik $f(t)$ dan $y(t)$,

```
plot([f(t),y(t),y4(t)],t=0..21,title="grafik f(t), y(
   t) dan y4(t)");
```



Gambar 14: Grafik $f(t), y(t)$ dan $y4(t)$

Selanjutnya titik t_4 ditentukan dengan menyelesaikan $f(t) = y_4(t)$

```
P4:=simplify(f(t)=y4);
```

$$P4 := -t * (t-21) * (t+1) = -23. * t + 1603.389289$$

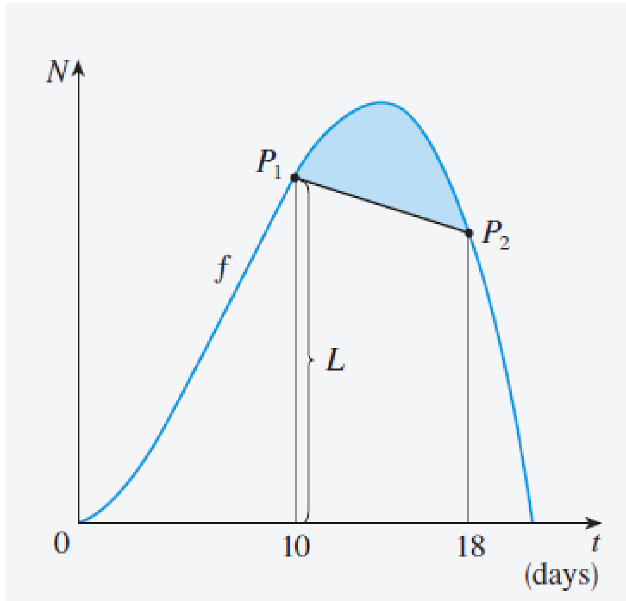
```
solve(P4,t);
```

$$11.25847153, 17.07980942, -8.338280945$$

t_4 adalah elemen kedua dari solusi command di atas, yaitu 17.07980942. Jadi, pada hari ke- 11 penularan dimulai dan berhenti pada hari ke-17 untuk pasien dengan koefisien imunitas $c = 0.9$.

5. Ulangi soal nomor 4 untuk $cf(t)$ dengan $c = 0.85, 0.6$ dan 0.4. Catat bahwa beberapa pasien mungkin tidak memiliki titik yang berkorespondensi dengan P_3.

6. Temukan luas daerah di bawah antara grafik f dan garis pada soal nomor 3. Luas ini menunjukkan jumlah tingkat penularan dari seorang yang terinfeksi. Perhatikan gambar di bawah ini.



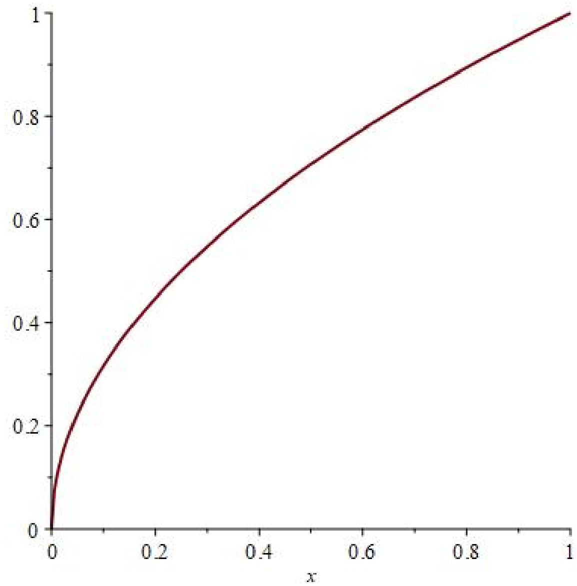
Gambar 15: Grafik jumlah sel terinfeksi pada t hari

5.3 Volume

Contoh 5.2. Temukan volume dari benda padat yang diperoleh dari memutar daerah di bawah kurva $y = \sqrt{x}$ dari 0 sampai 1 terhadap sumbu- x. Ilustrasikan definisi volume dengan menggambar benda tersebut.

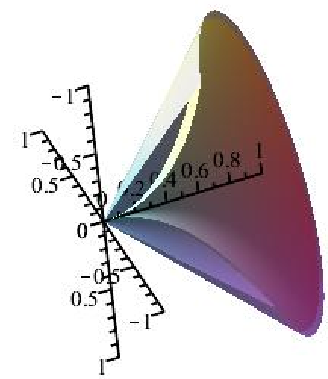
Solusi. Grafik dari kurva $y = \sqrt{x}$ dari $x = 0$ hingga $x = 1$ adalah

```
restart;
f:=sqrt(x):
with(plots):
plot(f(x),x=0..1)
```

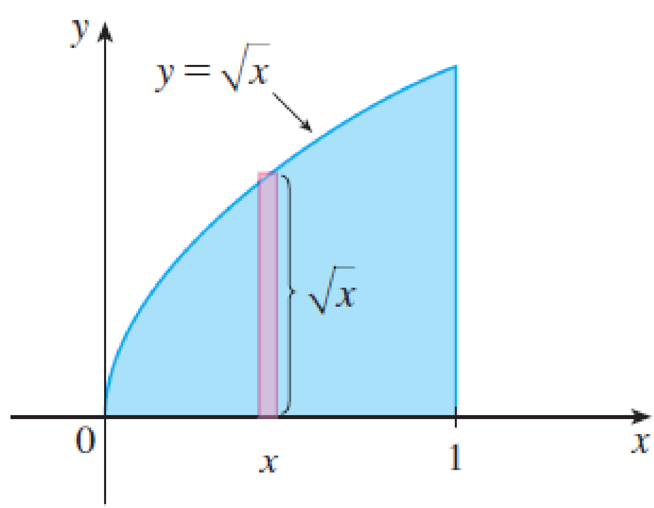


Grafik dari kurva $y = \sqrt{x}$ yang diputar terhadap sumbu-x dari 0 hingga 1 diberikan oleh

```
restart;
f:=r->sqrt(r);  # Rotation around x-axis
plot3d([r,f(r)*cos(phi),f(r)*sin(phi)], r=1..5,phi=Pi
   /2..2*Pi, style=surface, scaling=constrained, axes=
   normal);
```



Gambar 16: Kurva $y = \sqrt{x}$
untuk $x \in [0, 1]$ diputar terhadap sumbu-x



Gambar 17: Grafik $y = \sqrt{x}$

Perhatikan bahwa jika bidang tersebut dipotong melewati sumbu-x, diperoleh sebuah disk dengan jari-jari $\sqrt{x}$. Luas daerah yang dipotong ini adalah

$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$$

dan volume silinder (disk dengan ketebalan Δx) adalah

$$A(x)\Delta x = \pi x \Delta x$$

Benda padat ini berada di antara $x = 0$ dan $x = 1$, sehingga volumenya adalah

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi x dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

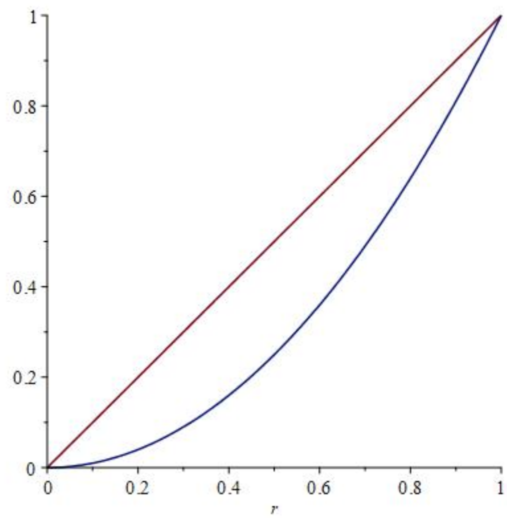
```
V:=int(pi*x,x=0..1)
```

$$V := \frac{\pi}{2}$$

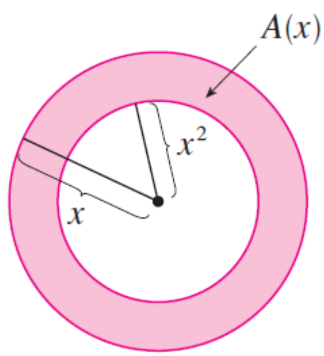
Contoh 5.3. Daerah R yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan $y = x^2$ diputar terhadap sumbu-x. Temukan volume benda padat yang dibentuk oleh kurva tersebut.

Solusi. Kurva daerah yang dibatasi oleh $y = x$ dan $y = x^2$ adalah

```
restart
f:=r:
g:=r^2:
with(plots):
plot([f(r),g(r)],r=0..1)
```



Gambar 18: Grafik daerah yang dibatasi $y = x$ dan $y = x^2$



f

Gambar 19: Bidang potong daerah yang dibatasi $y = x$ dan $y = x^2$ diputar terhadap sb-x

Bidang potong dalam bidang A_x memiliki bentuk *washer* (cincin annular) dengan jari-jari dalam x^2 dan jari-jari luar x. Maka luas daerah bidang potong diperoleh dengan mengurangkan luas lingkaran luar dengan luas lingkaran dalam:

$$A(x) = \pi x^2 - \pi(x^2)^2 = \pi(x^2 - x^4)$$

Sehingga volume bidang potong :

```
A:=pi*(x^2-x^4):
V:=int(A,x=0..1)
```

$$V := \frac{2\pi}{15}$$

5.4 Latihan

1. Plotlah daerah di antara kurva-kurva berikut dan hitung luasnya hingga lima tempat desimal.
   (a) $y = \dfrac{2}{1+x^4}$, $y = x^2$
   (b) $y = x^6$, $y = \sqrt{2-x^4}$
   (c) $y = \tan^2 x, y = \sqrt{x}$
   (d) $y = \cos x, y = x + 2\sin^4 x$
2. Jika laju kelahiran dari sebuah populasi adalah
   $$b(t) = 2200 + 52.3t + 0.74t^2 \text{orang per tahun}$$
   dan laju kematian adalah
   $$d(t) = 1460 + 28.8t \text{orang per tahun}$$
   temukan luas daerah diantara kurva-kurva tersebut untuk $0 \leq t \leq 10$. Merepresentasikan apa daerah ini?
3. Pada Contoh Kasus (5.3) dimodelkan kurva patogenesis campak dengan sebuah fungsi. Misalkan seorang pasien terinfeksi campak dengan imunitas virusnya memiliki kurva patogenesis yang dapat dimodelkan misalkan dengan $g(t) = 0.9f(t)$.

6 Studi Kasus

6.1 Fotosintesis

Laju produksi primer adalah laju konversi carbon inorganik ke karbon organik lewat fotosintesis. Laju ini diukur sebagai masa karbon tetap per unit biomasa, per satuan waktu. Model yang umum untuk hubungan ini adalah

$$P(I) = \frac{aI}{\sqrt{1 + bI^2}}$$

dengan P adalah laju produksi primer sebagai sebuah fungsi dari intensitas cahaya I. Misal intensitas cahaya berubah dengan waktu sesuai dengan persamaan $I(t) = kt$, dengan k adalah konstanta.

1. Tentukan laju produksi primer sebagai fungsi terhadap waktu
2. Berapa total produksi primer selama lima unit waktu pertama?

sumber : Diadaptassi dari A. Jassby et al., "Mathematical Formulation of the Relationship between Photosythesis and Light for Phytoplankton", *Limnology and Oceanography 21 (1976): 540-7*

6.2 Eksosistem Microbial Rumen

Rumen adalah ruang pertama dalam perut dari hewan pemamah biak seperti domba, kambing dan rusa. Reaksi fermentasi oleh organisme simbiotik dimulai dengan mencerna tumbuhan yang dimakan pemamah biak di dalam rumen. Jika μ adalah bagian dari makanan yang masuk atau keluar dari rumen per unit waktu dalam sebuah model untuk fermentasi yang berkelanjutan, maka integral

$$\int_0^1 \mu e^{-\mu t}(1 - t)dt \tag{5}$$

adalah bagian dari material terlarut tanpa difermentasi. Evaluasilah integral tersebut. Jelaskan makna masing-masing variabel yang terlibat dalam persamaan (5)

Diadaptasi dari R.E.HUngate, "The Rumen Microbial Ecosystem", *Annual Review of Ecology and Systematics* 6(1975):39-66